

9.1.17 Další vlastnosti kombinačních čísel

Předpoklady: 9108, 9109

Kombinační čísla udávají počet kombinací bez opakování = neuspořádaných k -tic sestavených z n prvků bez opakování.

Platí: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ - počet možností jak vybrat z n prvků k bez ohledu na pořadí (jde jen o to, které prvky jsme vybrali a nezáleží na tom, v jakém pořadí jsme výběr provedli).

Př. 1: Urči dosazením hodnoty kombinačních čísel: $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n}$. Své výsledky kombinatoricky zdůvodni.

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1 \quad (\text{platí: } 0! = 1)$$

Kolika způsoby můžeme z n prvků vybrat žádný? Jedním, nevybereme nic.

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{1! \cdot (n-1)!} = n$$

Kolika způsoby můžeme z n prvků vybrat jeden? Kterýkoliv z n prvků si můžeme nechat $\Rightarrow n$ možností.

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$$

Kolika způsoby můžeme z n prvků vybrat všech n ? Jedním, vybereme všechny.

Další pravidlo už známe, platí: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Kombinatorické zdůvodnění je snadné: Když vybíráme k prvků do kombinace, zbude v množině $n-k$ prvků, které tvoří také kombinaci, ale $n-k$ -člennou $\Rightarrow k$ -prvkových kombinací z n prvků bez opakování je stejně jako $n-k$ prvkových (vznikají společně).

Poslední kombinatorické pravidlo je nejsložitější:

Pro všechna celá nezáporná čísla n, k , $k < n$, platí: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Důkaz předchozí věty je snadný například na tomto konkrétním příkladě:

4B2007 má $n = 29$ studentů a $n+1$ -ního matematikáře Krynického. Kolika způsoby je možné z množiny 4B2007+Krynický vybrat $k+1 = 10$ lidí?

Vytváříme desetičlenné kombinace bez opakování z 30 prvků $\Rightarrow$ celkem $\binom{30}{10} = \binom{n+1}{k+1}$

možností.

Vytvořené kombinace můžeme rozdělit do dvou skupin:

- kombinace bez Krynického: je jich $\binom{29}{10} = \binom{n}{k+1}$ (vybíráme 10 lidí z 29 studentů 4B2007),
- kombinace s Krynickým: je jich $\binom{29}{9} = \binom{n}{k}$ (vybíráme 9 lidí z 29 studentů 4B2007 a přidáváme k nim Krynického),

vypsané dvě skupiny tvoří dohromady všechny hledané kombinace $\Rightarrow$

platí: $\binom{30}{10} = \binom{29}{10} + \binom{29}{9},$

a tedy obecně $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$

Př. 2: (BONUS) Dokaž vztah $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ dosazením do definice kombinačního čísla.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-[k+1])!} = \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1) \cdot k! \cdot (n-k-1)!} = \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1} \right) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot \frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)} = \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot \frac{n+1}{(n-k)(k+1)} = \frac{(n+1)n!}{(k+1)k! \cdot (n-k)(n-k-1)!} = \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

Všechny předchozí vzorce se používají při úpravách výrazů, které obsahují kombinační čísla:

Př. 3: Vyjádři jedním kombinačním číslem:

a) $\binom{20}{9} + \binom{20}{10}$ b) $\binom{15}{9} + \binom{15}{5}$ c) $\binom{5}{5} + \binom{6}{5} + \binom{7}{5} + \binom{8}{5} + \binom{9}{5}$

a) $\binom{20}{9} + \binom{20}{10}$

Použijeme vzorec $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \Rightarrow \binom{20}{9} + \binom{20}{10} = \binom{21}{10}.$

$$\text{b) } \binom{15}{9} + \binom{15}{5}$$

Na vzorec: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ nemáme správná kombinační čísla (potřebujeme aby se hodnoty k lišily o jedna) $\Rightarrow$ například místo $\binom{15}{5}$ bychom potřebovali $\binom{15}{10}$, naštěstí platí vztah $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ a tedy $\binom{15}{5} = \binom{15}{10} \Rightarrow \binom{15}{9} + \binom{15}{5} = \binom{15}{9} + \binom{15}{10} = \binom{16}{10}$.

$$\text{c) } \binom{5}{5} + \binom{6}{5} + \binom{7}{5} + \binom{8}{5} + \binom{9}{5}$$

na vzorec: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ nemáme na začátku výrazu správná kombinační čísla, místo $\binom{5}{5}$ bychom potřebovali $\binom{6}{6}$, naštěstí platí vztah $\binom{n}{n} = 1$ a tedy $\binom{5}{5} = 1 = \binom{6}{6} \Rightarrow$
 $\binom{5}{5} + \binom{6}{5} + \binom{7}{5} + \binom{8}{5} + \binom{9}{5} = \binom{6}{6} + \binom{6}{5} + \binom{7}{5} + \binom{8}{5} + \binom{9}{5} =$
 $= \binom{7}{6} + \binom{7}{5} + \binom{8}{5} + \binom{9}{5} = \binom{8}{6} + \binom{8}{5} + \binom{9}{5} = \binom{9}{6} + \binom{9}{5} = \binom{10}{6}$

Pedagogická poznámka: U bodů b) i c) budou žáci na začátku zřejmě potřebovat trochu postrčit. V bodě b) pouze uveďte použití vzorce $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ a neříkejte přesně jak. Mezi řešeními pak budou obě možnosti a bude možné si ověřit, že oběma postupy dojdou k různým kombinačním číslům, která se sobě rovnají.

Díky vztahům pro kombinační čísla můžeme sestavit zajímavý obrazec.

Př. 4: Opiš následující obrazec a vedle něj ho zapiš ještě jednou s tím, že místo kombinačních čísel zapíšeš jejich hodnoty.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & \\
 & & & & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & & & & & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
 & & & & & & \\
 \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & \\
 & & & & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & & & & & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
 & & & & & & \\
 \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & & & & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & & & & & & \\
 1 & & 3 & & 3 & & 1
 \end{array}$$

Př. 5: Dopiš do pravého trojúhelníku s hodnotami kombinačních čísel další řádku. Svůj výsledek zkontroluj dopsáním další řádky do trojúhelníku s kombinačními čísly.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} \\
 & & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & & & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & & & & & & \\
 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\
 & & & & & & \\
 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 & & & & & & \\
 & & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
 \end{array}$$

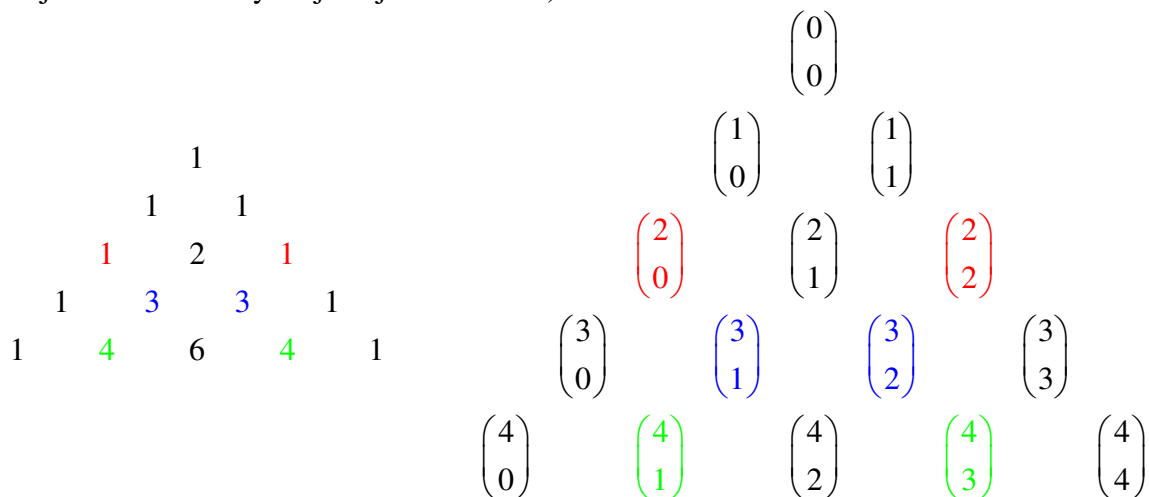
Obrazci, který jsme sestavovali se říká **Pascalův trojúhelník** (podle známého fyzika a matematika B. Pascala). Protože je celý sestavený z kombinačních čísel, dají se na něm demonstrovat vztahy, které pro ně platí.

Př. 6: Demonstruj na Pascalově trojúhelníku platnost vztahů pro kombinační čísla.

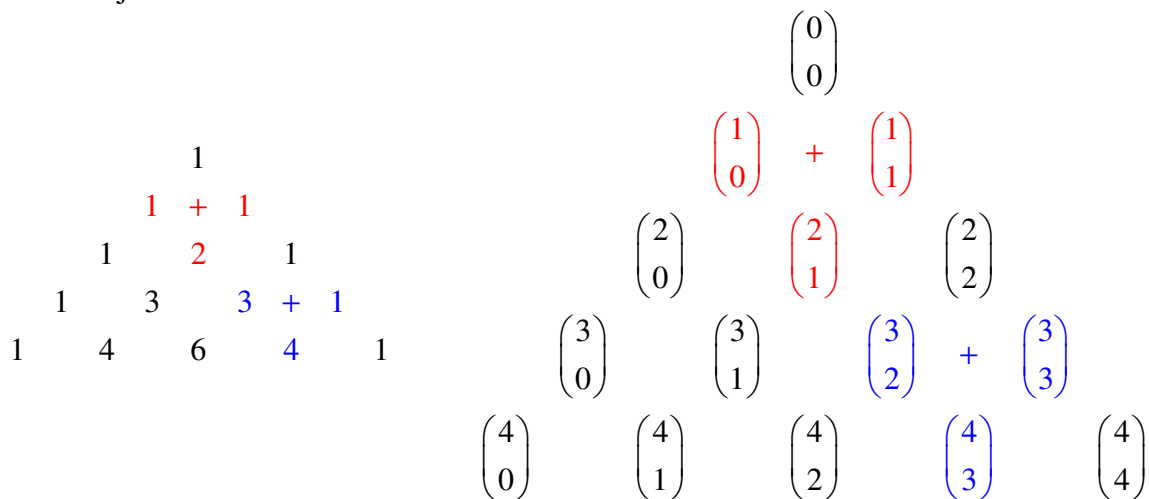
$$a) \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$b) \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \Rightarrow$ Pascalův trojúhelník je souměrný podle svislé osy (kombinační čísla stejné nečerné barvy mají stejnou hodnotu).



b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \Rightarrow$ Kombinační čísla, která nejsou na bočních stranách trojúhelníka získáme jako součet kombinačních čísel nad nimi.



Vzorce, které jsme probrali v první části hodiny, se mohou hodit při řešení některých rovnic nebo nerovnic.

Př. 7: Napiš sedmý řádek Pascalova trojúhelníka.

Sedmý řádek je sestavený z kombinačních čísel, která mají nahoře šestku $\Rightarrow$

$$\binom{6}{0} \binom{6}{1} \binom{6}{2} \binom{6}{3} \binom{6}{4} \binom{6}{5} \binom{6}{6}, \text{ po dosazení: } 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1.$$

Pedagogická poznámka: Rovnice s kombinačními čísly jsou zařazeny až na konec hodiny, protože nejsou důležité z hlediska další probírané látky a tak není nutné, aby je stihli vypočítat všichni.

Př. 8: Vyřeš rovnici $11\binom{x}{5} + 11\binom{x}{6} = 7\binom{x+2}{7}$.

Problém: Při řešení předchozích rovnic s kombinačními čísly jsme kombinační čísla rozepisovali do tvaru, který umožňoval řešení klasickými metodami $\Rightarrow$ při použití v tomto případě hrozí velké mocniny x .

$\Rightarrow$ Zkusíme dostat rovnici do tvaru $(\quad) = (\quad)$.

$$11\left[\binom{x}{5} + \binom{x}{6}\right] = 7\binom{x+2}{7} \quad \text{Vzorec: } \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

$$11\binom{x+1}{6} = 7\binom{x+2}{7} \quad \text{Přepíšeme kombinační čísla na faktoriály.}$$

$$11 \frac{(x+1)!}{6! \cdot (x+1-6)!} = 7 \frac{(x+2)!}{7! \cdot (x+2-7)!}$$

$$11 \frac{(x+1)!}{6! \cdot (x-5)!} = 7 \frac{(x+2)(x+1)!}{7 \cdot 6! \cdot (x-5)!}$$

$$11 = x + 2$$

$$x = 9$$

$$K = \{9\}$$

Př. 9: Vyřeš rovnici $\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-3} = \binom{x+1}{3}$.

Stejný postup jako v předchozím příkladu.

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-3} = \binom{x+1}{3}$$

$$\binom{x+1}{x-2} = \binom{x+1}{3}$$

$$\text{Vzorec } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \Rightarrow \binom{x+1}{x-2} = \binom{x+1}{3}.$$

$$\binom{x+1}{3} = \binom{x+1}{3} \Rightarrow \text{Tato rovnost platí vždy pokud je kombinační číslo definováno} \Rightarrow$$

$$x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \quad (\text{ostatní podmínky jsou v tomto případě splněny také}).$$

$$K = \{x \in \mathbb{N}; x \geq 3\}$$

Př. 10: Petáková:

strana 143/cvičení 22 b) c) d) f)

strana 143/cvičení 23 a) b) c) d)

strana 143/cvičení 24 a) b)

Shrnutí: Vlastnosti kombinačních čísel je možné snadno odvodit z Pascalova trojúhelníka.

